

Необходимое и достаточное условие предкомпактности, предкомпактность пространства при наличии предкомпактной сети

$\mathcal{M}$ предкомпактно $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ вполне огр.

Д-во: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{M}$ предкомп. $\Rightarrow$

1) $\forall \varepsilon > 0 \forall x_1 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \subset B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow$ док.

2) рассм. $\forall x_2 \in \mathcal{M} \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Если $\mathcal{M} \subset (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$

$\Rightarrow$ конек. ε -сеть $\Rightarrow$ док., иначе

3) $\forall x_3 \in \mathcal{M} \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$. Если $\mathcal{M} \subset \bigcup_{k=1}^3 B(x_k, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ док., иначе ...

Если процесс обрывается на k -м шаге $\Rightarrow$ док.

Иначе получим посыл. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, d(x_k, x_m) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ нельзя выбрать функ. подпослед. $\Rightarrow$ против. с предкомп. $\mathcal{M}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{M}$ вполне ограничено $\Rightarrow$

Рассм. $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, x_k \in \mathcal{M}$.

$\exists \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Построим конек. ε -сеть $\forall \varepsilon_n$.

ε_1 . $\mathcal{M} \subset \bigcup_{k=1}^{N_1} B(x_{1k}, \varepsilon_{1k}) \Rightarrow \exists B(x_{1k_1}, \varepsilon_{1k_1})$, сод. беск.

число x_{1k} -тов $\{x_{1k}\} \Rightarrow$ выбер. $x_{1k_1} \in B(x_{1k_1}, \varepsilon_{1k_1})$, оставшимся x_{1k} -м $\{x_{1k}\}$ сод. в том шаре $B(x_{1k_1}, \varepsilon_{1k_1})$.

$B(x_{1k_1}, \varepsilon_{1k_1}) \supset \mathcal{M}$ -предк. $\Rightarrow$ можно повторить.

$\exists B(x_{2k_2}, \varepsilon_{2k_2}) : B(x_{1k_1}, \varepsilon_{1k_1}) \subset \bigcup_{k=1}^{N_2} B(x_{2k_2}, \varepsilon_{2k_2})$

$\exists$ шар $B(x_{2k_2}, \varepsilon_{2k_2})$, сод. беск. число x_{1k} .

$\Rightarrow x_{2k_2} \in B(x_{2k_2}, \varepsilon_{2k_2})$ оставшим x_{1k} -м, сод.

в шаре $B(x_{2k_2}, \varepsilon_{2k_2})$

...

$\Rightarrow \{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}, d(x_{kn}, x_{km}) \leq \varepsilon_n$, если $k_m > k_n \Rightarrow \{x_{kn}\}$ функ.

Сл. $\mathcal{M}$ -предкомп., if $\exists$ предкомп. ε -сеть $\forall \varepsilon$

1) $\forall \varepsilon > 0 \exists S \subset M$ и $E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$.

S -прикрытия $\Rightarrow$ по т. $\exists x_1, \dots, x_n \in S: S \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$ -
кон. ε -сеть для $S \Rightarrow E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 2\varepsilon)$,

т.е. $\forall z \in E \Rightarrow \exists B(x_k, \varepsilon) \ni z \quad x_k \in S, k=1, \dots, n$,

$\Rightarrow \exists B(x_k, \varepsilon) \ni x \Rightarrow \exists z \in B(x_k, 2\varepsilon)$, т.е.

$$d(z, x_k) \leq d(z, x) + d(x, x_k) < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \{x_k\}$ - 2ε -сеть для E .

2) Показ., что $y_k \in E$.

Противр. $x_k \in B(y_k, 2\varepsilon) \cap E \Rightarrow E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 4\varepsilon)$,
т.е. $\forall k \in E \exists B(y_k, 2\varepsilon) \ni x \Rightarrow d(x_k, x) < 4\varepsilon$

т.е. $x_k \in B(y_k, 2\varepsilon) \Rightarrow x_k \in B(x, 4\varepsilon)$

$E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 4\varepsilon)$, $x_k \in E \Rightarrow$ т.е. E - прикрытие;

т.е. $\exists$ конечн. ε -сеть. ■